

集合と論理 レポート 第7回 解答

レポート問題 6.1. (1) $x = 0$ の時, $xy = 1$ となる y は存在しないので, この命題は偽.

(2) 任意の $x \in \mathbb{R}$ 対して, $y = -x$ とおけば, $x + y = 0$ となるので, この命題は真.

(3) 0 でないすべての実数 x に対して, $y = 1/x$ となるような y は存在しない (例えば, $x = 1$ なら $y = 1$, $x = 2$ なら $y = 1/2$ となって y が異なる) ので, この命題は偽.

(4) すべての実数 x に対して, $y = -x$ となるような y は存在しないので, この命題は偽.

レポート問題 6.2.

$$\begin{aligned} (1) \quad \forall x \ p(x) \rightarrow \exists x \ q(x) &= (\neg(\forall x \ p(x))) \vee \exists x \ q(x) \\ &\equiv \exists x \ (\neg p(x)) \vee \exists x \ q(x) \\ &\equiv \exists x \ ((\neg p(x)) \vee q(x)) \\ &= \exists x \ (p(x) \rightarrow q(x)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \exists x \ p(x) \rightarrow \forall x \ q(x) &= (\neg(\exists x \ p(x))) \vee \forall x \ q(x) \\ &\equiv \forall x \ (\neg p(x)) \vee \forall x \ q(x) \\ &\equiv \forall x \ ((\neg p(x)) \vee q(x)) \\ &= \forall x \ (p(x) \rightarrow q(x)). \end{aligned}$$

レポート問題 6.3.

$$\begin{aligned} (1) \quad \neg(\exists x \ \forall y \ (p(x, y) \wedge q(x))) &\equiv \forall x \ \neg(\forall y \ (p(x, y) \wedge q(x))) \\ &\equiv \forall x \ \exists y \ \neg((p(x, y) \wedge q(x))) \\ &\equiv \forall x \ \exists y \ ((\neg p(x, y)) \vee (\neg q(x))). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \neg(\forall x \ \exists y \ p(x, y) \rightarrow \exists x \ q(x)) &\equiv \neg(\neg(\forall x \ \exists y \ p(x, y)) \vee \exists x \ q(x)) \\ &\equiv \forall x \ \exists y \ p(x, y) \wedge \neg(\exists x \ q(x)) \\ &\equiv \forall x \ \exists y \ p(x, y) \wedge \forall x \ (\neg q(x)) \\ &\equiv \forall x \ (\exists y \ p(x, y) \wedge (\neg q(x))). \end{aligned}$$