

集合と論理 レポート 第13回 解答

レポート問題 13.1. (1) $f(a_1) = f(a_2)$ とすると, $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$ である. 仮定より, $g \circ f$ は単射なので, $a_1 = a_2$ となり, f は単射である.

(2) $c \in C$ とする. $g \circ f$ は全射なので, ある $a \in A$ が存在して, $c = g(f(a))$ となる. この時, $b = f(a) \in B$ に対して, $c = g(b)$ となるので, g は全射である.

レポート問題 13.2. (1) $y \in f(f^{-1}(B))$ とする, この時, ある $x \in f^{-1}(B)$ が存在して, $y = f(x) \in B$ となる. よって, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

(2) $x \in A$ とすると, $f(x) \in f(A)$ であり, $x \in f^{-1}(f(A))$ である. よって, $f^{-1}(f(A)) \supset A$.

(3) $y \in (f(A))^c$ とすると, $y \in Y - f(A)$ であり, $y \in Y \wedge y \notin f(A)$ である. f は全射なので, ある $x \in X$ が存在して, $y = f(x)$ であり, かつ $y \notin f(A)$ なので, $x \in A^c$. よって, $y \in f(A^c)$ なので, $f(A^c) \supset (f(A))^c$.

(4) $y \in f(A^c)$ とすると, ある $x \in A^c$ が存在して, $y = f(x)$ となる. もし, ある $x' \in A$ で $y = f(x')$ であるものが存在するとすると, f の単射性から $x = x'$ となり, $x \in A^c$ に反する. よって, $y \notin f(A)$ であり, $y \in f(A^c)$ なので, $f(A^c) \subset (f(A))^c$.

(5) $x \in f^{-1}(B^c) \Leftrightarrow f(x) \in B^c \Leftrightarrow \neg(f(x) \in B)$ なので, $x \in f^{-1}(B^c) \Leftrightarrow \neg(x \in f^{-1}(B))$ であり, $x \in f^{-1}(B^c) \Leftrightarrow x \in (f^{-1}(B))^c$ となる. 写像 $f: X \rightarrow Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$ について, 次を示せ.