線形代数II演習　第6回 解答例

課題 6.1. (1) -6　(2) 3　(3) $18/5$

課題 6.2. (1) $3\sqrt{2}$　(2) $\sqrt{14}$　(3) $4\sqrt{10}/5$

課題 6.3. $a = 1$

線形代数II演習　第6回 レポート 解答例

レポート 6.1.

(1) $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とおく．$W^\perp$ は u_1, u_2 と直交するベクトル全体である．$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とおくと，x が u_1, u_2 と直交する条件は x が $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} x = 0$ をみたすことである．この連立一次方程式を解くと，解は $x = a \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(a \in \mathbb{R})$ である．よって，

$$W^\perp = \left\{ a \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \right\}.$$

(2) $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおく．$W^\perp$ は u_1, u_2 と直交するベクトル全体である．$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とおくと，x が u_1, u_2 と直交する条件は x が $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} x = 0$ をみたすことである．この連立一次方程式を解くと，解は $x = a \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(a \in \mathbb{R})$ である．よって，

$$W^\perp = \left\{ a \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \right\}.$$

(3) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ とおく. $W^{\perp}$ は u と直交するベクトル全体である. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とおくと, x が u_1, u_2 と直交する条件は x が $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} x = 0$ をみたすことである. この一次方程式を解くと, 解は $x = a_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(a_1, a_2 \in \mathbb{R})$ である. よって,

$$W^{\perp} = \left\{ a_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

レポート 6.2.

proof. $V = W \oplus W^{\perp}$ なので $v \in V$ が $v = w + w'$, $w' = \sum_{i=1}^{r} (v, u_i) u_i$ と表されることを示せばよい. $W^{\perp}$ の正規直交基底を $\{u'_1, \cdots, u'_s\}$ とすると, $\{u_1, \cdots, u_r, u'_1, \cdots, u'_s\}$ は V の正規直交基底である. 任意の $v \in V$ に対して,

$$v = (v, u_1)u_1 + \cdots + (v, u_r)u_r + (v, u'_1)u'_1 + \cdots + (v, u'_s)u'_s$$

であり,

$$(v, u_1)u_1 + \cdots + (v, u_r)u_r \in W, \qquad (v, u'_1)u'_1 + \cdots + (v, u'_s)u'_s \in W^{\perp}$$

である. よって

$$w = \sum_{i=1}^{r} (v, u_i)u_i, \qquad w' = \sum_{i=1}^{s} (v, u'_i)u'_i$$

とおくと, $v = w + w'$ なので, $P_{V/W}(v) = \sum_{i=1}^{r} (v, u_i)u_i$. □