線形代数II演習　第5回 解答例

課題 5.1.
proof. 任意の $u, v \in U$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}(S \cdot T)(\alpha u + \beta v) &= S(T(\alpha u + \beta v)) \\ &= S(\alpha T(u) + \beta T(v)) \\ &= \alpha S(T(u)) + \beta S(T(v)) = \alpha S \cdot T(u) + \beta S \cdot T(v)\end{aligned}$$

なので, $S \cdot T$ は線形写像である. □

課題 5.2. (1) U, V の標準基底に関する表現行列は A そのものなので, 表現行列は A.

(2) U の基底を標準基底から $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ に取り替える変換行列は

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

であり, V の標準基底から $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ に取り替える変換行列は

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

である. ここで

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

なので, T の表現行列 B は

$$\begin{aligned}B = Q^{-1}AP &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

線形代数II演習　第5回 レポート 解答例

レポート 5.1. 線形変換 T の標準基底に関する表現行列は A であり, 標準基底から与えられた基底への変換行列は

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

である. ここで

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

なので, 与えられた基底に関する T の表現行列 B は

$$\begin{aligned} B = P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -4 & 2 \\ -4 & -7 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

レポート 5.2. $T(1) = x^2$, $T(x) = 1$, $T(x^2) = 2x$ なので,

$$(T(1), T(x), T(x^2)) = (x^2, 1, 2x) = (1, x, x^2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. よって, 表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

レポート 5.3. $T(1) = 1 + x$, $T(x) = 2$, $T(x^2) = 4x$ なので,

$$(T(1), T(x), T(x^2)) = (1, x, x^2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であり, T の表現行列は $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. A の簡約化は $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ であり, A, B の列ベクトル表示をそれぞれ $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ とする.

まず, 像と階数を求める. B の列ベクトル b_1, b_2 が一次独立な最大個数を与えるベクトルであり, $b_3 = 4b_1 - 2b_2$ なので, a_1, a_2 が A の列ベクトルの一次独立な最大個数を与えるベクトルであり, $a_3 = 4a_1 - 2a_2$ である. したがって, $\mathbb{R}[x]_2$ で言い換えると, $T(1), T(x)$ は一次独立であり, $T(x^2) = 4T(1) - 2T(x)$ とかける. $T(1) = 1 + x$, $T(x) = 2$ であるから

$$\text{Im } T = \{c_1(1 + x) + 2c_2 \,|\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

であり, $\text{rank } T = \dim(\text{Im } T) = 2$.

次に核と退化次数を求める. $d = (d_1, d_2, d_3)$ とすると

$$\begin{aligned} T(d_1 + d_2x + d_3x^2) &= d_1T(1) + d_2T(x) + d_3T(x^2) \\ (T(1), T(x), T(x^2))d &= (1, x, x^2)Ad \end{aligned}$$

である. ここで $\{1, x, x^2\}$ は一次独立なので, $T(d_1 + d_2x + d_3x^2) = 0$ と $Ad = 0$ は同値である. よって, B を係数行列にもつ連立一次方程式 $Bd = 0$ を解けば良いので, $d = k(-4, 2, 1)$ $(k \in \mathbb{R})$ となる. これを多項式で表すと

$$\text{Ker } T = \{k(-4 + 2x + x^2) \,|\, k \in \mathbb{R}\}$$

であり, $\dim(\text{Ker } T) = 1$.

レポート 5.4.

proof. U の 1 組の基底を $\{u_1, \cdots, u_n\}$ とし, V の 1 組の基底を $\{v_1, \cdots, v_m\}$ とする. T の $\{u_1, \cdots, u_n\}$ と $\{v_1, \cdots, v_m\}$ に関する表現行列を $A = (a_1, \cdots, a_n)$ とすると A は

$$(T(u_1), \cdots, T(u_n)) = (v_1, \cdots v_m)A$$

で与えられる行列である. このとき,

$$\begin{aligned} \text{rank } T &= \dim T(U) \\ &= \{T(u_1), \cdots, T(u_n)\} \text{ で生成される } V \text{ の部分空間の次元} \\ &= \{T(u_1), \cdots, T(u_n)\} \text{ の 1 次独立な最大個数} \end{aligned}$$

である. ここで$\{v_1, \cdots, v_m\}$が一次独立であることから, $\{T(u_1), \cdots, T(u_n)\}$
と$\{a_1, \cdots, a_n\}$は同じ一次関係を持つ, すなわち,

$\{T(u_1), \cdots, T(u_n)\}$の1次独立な最大個数 $= \{a_1, \cdots, a_n\}$の1次独立な最大個数

である. したがって, rank T = rank A. □