線形代数II演習　第4回 解答例

課題 4.1.
proof. $T : U \to V$ を線形写像とする. このとき, 線形性より $T(0) = 0$ なので, $0 \in \mathrm{Ker}\ T$ である. また, 任意の $u, v \in \mathrm{Ker}\ T$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して,

$$T([\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v) = \alpha 0 + \beta 0 = 0$$

なので, $\alpha u + \beta v \in \mathrm{Ker}\ T$ である. よって, $\mathrm{Ker}\ T$ は U の部分空間である. □

課題 4.2. (1) 線形写像ではない.　　(2) 線形写像である.

課題 4.3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと, 行基本変形より

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. よって $Ax = 0$ は

$$x_1 + 2x_2 - x_4 = 0, \qquad x_3 + x_4 = 0$$

なので,

$$\mathrm{Ker}\ T = \{sa_1 + ta_2 | s, t \in \mathbb{R}\}, \qquad a_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる. よって, 基底の一例は $\{a_1, a_2\}$ であり, $\dim \mathrm{Ker}\ T = 2$.

次に像を求める. A の列をそれぞれ b_1, b_2, b_3, b_4 とすると,

$$b_1 = 2b_2, \quad b_4 = b_3 - b_1, \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である. b_1 と b_3 は一次独立なので,

$$\mathrm{Im}\ T =< b_1, b_3 > .$$

よって, 基底の一例は $\{b_1, b_3\}$ であり, $\dim \mathrm{Im}\ T = 2$.

線形代数II演習　第4回 レポート 解答例

レポート 4.1. (1) 線形写像である.　　(2) 線形写像である.

レポート 4.2.
(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

とおくと, 行基本変形より

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. よって $Ax = 0$ は

$$x_1 + 2x_3 = 0, \qquad x_2 + x_3 = 0$$

なので,

$$\mathrm{Ker}\ T = \{ta_1 | t \in \mathbb{R}\}, \qquad a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる. よって, 基底の一例は $\{a_1\}$ であり, $\dim \mathrm{Ker}\ T = 1$.
　次に像を求める. A の列をそれぞれ b_1, b_2, b_3 とすると,

$$2b_1 + b_2 - b_3 = 0, \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である. b_1 と b_2 は一次独立なので,

$$\mathrm{Im}\ T = < b_1, b_2 > .$$

よって, 基底の一例は $\{b_1, b_2\}$ であり, $\dim \mathrm{Im}\ T = 2$.

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

とおくと, 行基本変形より

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. よって $Ax = 0$ は

$$x_1 - 2x_2 = 0, \qquad x_3 = 0$$

なので,

$$\mathrm{Ker}\ T = \{ta_1 | t \in \mathbb{R}\}, \qquad a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる. よって, 基底の一例は $\{a_1\}$ であり, $\dim \mathrm{Ker}\ T = 1$.

次に像を求める. A の列をそれぞれ b_1, b_2, b_3 とすると,

$$2b_1 + b_2 = 0, \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

である. b_1 と b_3 は一次独立なので,

$$\mathrm{Im}\ T = < b_1, b_3 > .$$

よって, 基底の一例は $\{b_1, b_3\}$ であり, $\dim \mathrm{Im}\ T = 2$.

(3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

とおくと, 行基本変形より

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

となる. よって $Ax = 0$ は

$$x_1 - x_3 = 0, \qquad x_2 - x_3 = 0$$

なので,

$$\mathrm{Ker}\ T = \{ta_1 | t \in \mathbb{R}\}, \qquad a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる. よって, 基底の一例は $\{a_1\}$ であり, $\dim \mathrm{Ker}\ T = 1$.

次に像を求める. A の第 *1* 列, 第 *2* 列は

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

である. b_1 と b_2 は一次独立なので, $\mathbb{R}^2$ の基底であり

$$\mathrm{Im}\ T = \mathbb{R}^2.$$

よって, 基底の一例は $\{b_1, b_2\}$ であり, $\dim \mathrm{Im}\ T = 2$.