

線形代数II演習 第3回 解答例

課題 3.1.

$$c_1 v_1 + c_2 + v_2 = 0$$

とおくと,

$$c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

なので,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

この係数行列のランクは2なので, $c_1 = c_2 = 0$ となる. よって, v_1, v_2 は $\mathbb{R}^2$ の基底である. また, 基本変形より

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{23}{8} \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

なので,

$$v = \frac{23}{8}v_1 + \frac{5}{4}v_2.$$

課題 3.2.

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$$

とおくと,

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

なので,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

この係数行列のランクは3なので, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ となる. よって, v_1, v_2, v_3 は $\mathbb{R}^3$ の基底である. また, 基本変形より

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

なので,

$$v = 3v_1 + v_3.$$

課題 3.3. W は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である. 係数行列のランクは 2 なので, $\dim W = 4 - 2 = 2$. また,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

なので,

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \quad -2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0$$

である. ここで, $x_3 = 1, x_4 = 0$ とすると,

$$x_1 = -\frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{5}{2},$$

また, $x_3 = 0, x_4 = 1$ とすると,

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -2,$$

なので, W の 1 組の基底は

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

微積分Ⅱ演習 第3回 レポート

レポート 3.1.

proof.

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 = 0$$

とする. この両辺を微分すると

$$c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 = 0$$

となる. さらに両辺を微分すると

$$2c_2 + 6c_3x = 0$$

であり, もう一度微分すると $c_3 = 0$ となる. これを順に代入していくと, $c_0 = c_1 = c_2 = 0$ となるので, $1, x, x^2, x^3$ は 1 次独立である. $\square$

レポート 3.2.

(1) W の係数行列のランクは 3 なので, $\dim W = 5 - 3 = 2$. また,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

なので,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_4 - x_5 = 0$$

である. ここで, $x_3 = 1, x_5 = 0$ とすると,

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_4 = 0$$

また, $x_3 = 0, x_5 = 1$ とすると,

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 0, \quad x_4 = 1$$

なので, W の 1 組の基底は

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) $f(x) \in \mathbb{R}[x]_3$ は

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$$

と書けるので, $f(1) = 0$ より

$$c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 0,$$

また, $f'(1) = 0$ より

$$c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0$$

となる. よって,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0$$

となる. この係数行列のランクは 2 なので, $\dim W = 4 - 2 = 2$. また,

$$c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 0, \quad c_2 + 2c_2 + 3c_3 = 0$$

なので, $c_2 = 1, c_3 = 0$ とすると,

$$c_0 = 1, \quad c_1 = -2$$

であり, $c_2 = 0, c_3 = 1$ とすると,

$$c_0 = 2, \quad c_1 = -3$$

となる. よって, W の 1 組の基底は

$$1 - 2x + x^2, \quad 2 - 3x + x^3.$$

レポート 3.3. (発展課題)

proof. V の 1 次独立な元の個数の最大値は n なので, W の中の 1 次独立な元の個数は n を超えない. よって, W は有限次元である.

$\dim W = m$ とし, $\{v_1, \dots, v_m\}$ を W の基底とする. このとき, $v_1, \dots, v_m$ は V の 1 次独立な元なので, $m \leq n$ である. もし $m = n$ ならば, $V = W$ である. 実際, $V \neq W$ ならば, W に含まれない V の 1 つの元 v を取れば, $v_1, \dots, v_m, v$ は 1 次独立となり, V は $m + 1 = n + 1$ 個の 1 次独立な元を

含むことになる. これは $\dim V = n$ に反する. よって, $V = W$ であり, V の基底は $\{v_1, \dots, v_m\}$ で与えられる.

次に $m < n$ とする. このとき, $\{v_1, \dots, v_m\}$ は V の基底ではないので, $V \neq W$ である. ここで, W に含まれない V の元の 1 つを v_{m+1} とすれば, $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}$ は 1 次独立である. もし, $m+1 = n$ ならば, 上述より $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}\}$ は V の基底である. また, $m+1 < n$ ならば, 上と同様にして, $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, v_{m+2}$ が 1 次独立となるような V の元 v_{m+2} が存在する. これを繰り返せば, V の基底を構成することができる. $\square$