

複素解析II 演習 第1回

問題 1.1. 次のべき級数の収束半径 R を求めなさい. ただし, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$ を使って良い.

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3n+2)!} (z-1)^n \qquad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+i}{3n-2i} \right)^n (z-i)^n$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} (z+1)^n \qquad (4) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \left(\frac{3i}{2} \right)^n (z+i)^n$$

問題 1.2. 次の級数について和を求めなさい.

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} \quad (|z| < 1) \qquad (2) \sum_{n=0}^{\infty} (z+i)^n \quad (|z+i| < 1)$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(1+i)^n} \quad (|z| < \sqrt{2}) \qquad (4) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n \quad (|z| < 1)$$

問題 1.3. 次の関数を指定された領域・指定された点でべき級数展開しなさい.

$$(1) \frac{1}{2-z} \quad (|z| < 2), \quad \text{中心 } z=0 \qquad (2) \frac{1}{2+z} \quad (|z-1| < 3), \quad \text{中心 } z=1$$

問題 1.4. 次の関数を指定された領域・指定された点でべき級数展開しなさい.

$$(1) \frac{1}{1+2z} \quad (|z| < 1/2), \quad \text{中心 } z=0 \qquad (2) \frac{1}{1-2z} \quad (|z+1| < 3/2), \quad \text{中心 } z=-1$$

$$(3) \frac{1}{(1-2z)^2} \quad (|z| < 1/2), \quad \text{中心 } z=0 \qquad (4) \frac{1}{(3z-1)^3} \quad (|z| < 1/3), \quad \text{中心 } z=0$$

$$(5) \frac{1}{(z+1)(z+2)} \quad (|z| < 1) \quad \text{中心 } z=0 \qquad (6) \frac{1}{z(z+i)} \quad (|z-i| < 1) \quad \text{中心 } z=i$$

問題 1.5. 次の関数を指定された点でテイラー展開しなさい.

$$(1) e^z \quad (z=i) \qquad (2) e^{2z} \quad (z=-1)$$

$$(3) \sin z \quad (z=-\pi/2) \qquad (4) \cos^2 z \quad (z=0)$$

$$(5) \operatorname{Log}(1+z) \quad (z=1/2)$$

問題 1.6. 次の極限值を求めなさい.

$$(1) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - e^{3iz}}{z} \quad (2) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos(2\pi iz) - 1}{z^2} \quad (3) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cosh z - e^z}{\sinh(\pi z)}$$

問題 1.7. 次の級数について指定された領域で和を求めなさい.

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n}} \quad (|z| > 1) \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-z)^n} \quad (|z-1| > 1)$$
$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-2)^n} \quad (|z-2| > 1) \quad (4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z}{(z+i)^n} \quad (|z+i| > 1)$$

レポート提出期限 6月21日 12時 (いつもと締切が違うので注意!!)