

微積分Ⅱ演習 第10回 レポート

レポート 10.1. 次の変換のヤコビアンを求めなさい.

$$(1) \begin{cases} x = u + 2v, \\ y = -2u + 3v \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x = uv + v^2, \\ y = u^2 + uv^3 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x = 2r \cos \theta, \\ y = 3r \sin \theta \end{cases}$$

レポート 10.2. 極座標変換によって領域 D が移される $r\theta$ 平面の領域 E を求めなさい.

$$(1) D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$$

$$(2) D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0\}$$

レポート 10.3. 次の積分を極座標で表し, その値を求めなさい.

$$(1) \iint_D y \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) \mid y \geq 0, 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\}$$

$$(2) \iint_D \log(x^2 + y^2) \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$$

レポート 10.4. 次の積分値を求めよ.

$$(1) \iint_D y(x^2 + y^2) \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$(2) \iint_D \frac{\log(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2, -x \leq y \leq \sqrt{3}x\}$$

$$(3) \iint_D \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}} \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

レポート 10.5. 次の積分値を求めよ.

$$(1) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 4\}$$

$$(2) \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$(3) \iint_D (x-y)^2 \sin(x+y) dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq x-y \leq \pi, 0 \leq x+y \leq \pi\}$$

$$(4) \iint_D (y^2 - x^2)e^{x^2+y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid y \geq x \geq 0, x+y \leq 1\}$$

レポート 10.6. 次の広義積分を計算せよ.

$$(1) \int \int_D \frac{1}{(x^2+9)(y^2+4)} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$(2) \int \int_D \frac{1}{(x^2+y^2)^{2/3}} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 4\}$$

レポート 10.7. (1) 次の広義重積分を計算せよ.

$$J = \int \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

(2) $D(A) := [-A, A] \times [-A, A]$ に対して,

$$\begin{aligned} \int \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int \int_{D(A)} e^{-x^2-y^2} dx dy \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\int_{-A}^A e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-A}^A e^{-y^2} dy \right) \end{aligned}$$

となることを用いて広義積分 $I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ の値を求めよ.

レポート 10.8. 次の広義積分を計算せよ.

$$\int \int_D e^{-2x} y^2 dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x \geq 0, 0 \leq y \leq 1\}$$

レポート 10.9. 次の広義積分を計算せよ.

$$(1) \iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} dx dy, \quad (\alpha < 2), \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < a^2\}$$

$$(2) \iint_D \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

レポート 10.10. 次の広義積分を計算せよ.

$$(1) \iint_D (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x, y \geq 0\}$$

$$(2) \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y^2 < x^2\}$$

レポート 10.11. 次の広義積分は収束するかどうか判定せよ.

$$(1) \iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x, y \geq 0\}$$

$$(2) \iint_D (x + y)e^{-(x+y)} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x, y \geq 0\}$$

レポート 10.12. 次の積分は順序交換できないことを示せ.

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{x - y}{(x + y + a)^3} dy \right) dx \quad (a > 0)$$

レポート提出期限 1 月 6 日 12 時