微積分II演習　第4回

課題 4.1.

$$(1)\ \infty \qquad (2)\ 2 \qquad (3)\ 0 \qquad (4)\ \frac{1}{\sqrt{2}}$$

課題 4.2.

$$(1)\ 2 \qquad (2)\ \frac{7}{4} \qquad (3)\ 6$$

課題 4.3. D が開集合 $\Leftrightarrow D = \mathrm{IntD}$, 　　D が閉集合 $\Leftrightarrow D = \overline{D}$

課題 4.4.

$$(1)\ \{(x,y)\,|\,x^2+y^2<2\} \qquad (2)\ \{(x,y)\,|\,x \neq y\}$$

課題 4.5. 図は省略

(1) $\partial D = \{(x,y)\,|\,|x|=4,\ |y|\leq 2$ または $|x|\leq 4\ |y|=2\}$, $\mathrm{Int}D = D$, $\overline{D} = \{(x,y)\,|\,|x|\leq 4,\ |y|\leq 2\}$; 有界開集合

(2) $\partial D = \{(x,y)\,|\,y = x^2,\ 0\leq x\leq 1$ または $x = y^2\ 0\leq y\leq 1\}$, $\mathrm{Int}D = \{(x,y)\,|\,y>x^2,\ x>y^2\}$, $\overline{D} = D$; 有界閉集合

(3) $\partial D = \{(x,y)\,|\,y-x=1$ または $y-x=2\}$, $\mathrm{Int}D = \{(x,y)\,|\,1<y-x<2\}$, $\overline{D} = \{(x,y)\,|\,1\leq y-x\leq 2\}$; 非有界で開集合でも閉集合でもない

(4) $\partial D = \{(x,y)\,|\,xy=1,\ x+y\leq 4$ または $xy\geq 1\ x+y=4\}$, $\mathrm{Int}D = D$, $\overline{D} = \{(x,y)\,|\,xy\geq 1,\ x+y\leq 4\}$; 非有界な開集合

(5) $\partial D = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2=4,\ x\geq 0$ または $x=0\ |y|\leq 2\}$, $\mathrm{Int}D = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2<4,\ x>0\}$, $\overline{D} = \{(x,y)\,|\,,x^2+y^2\leq 4,\ x\geq 0\}$; 有界で開集合でも閉集合でもない

(6) $\partial D = \{(x,y)\,|\,|x|+|y|=4\}$, $\mathrm{Int}D = \{(x,y)\,|\,|x|+|y|<4\}$, $\overline{D} = D$; 有界閉集合

レポート 4.1. (1)

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (|x| < 1)$$

であり, 右辺の収束半径は 1 である．ここで, 両辺を項別積分すると

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \quad (|x| < 1)$$

であり, $x = 1$ とすると,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} \qquad (*)$$

は収束する交代級数である．よって, Abel の連続性定理より, $\leq x \leq 1$ において, $(*)$ は連続である．一方, $\log(1+x)$ も $\leq x \leq 1$ で連続なので,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2$$

となる．

(2)

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \quad (|x| < 1)$$

であり, 右辺の収束半径は 1 である．ここで, 両辺をこう別積分すると

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1} \quad (|x| < 1)$$

であり, $x = 1$ とすると,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \qquad (**)$$

は収束する交代級数である．よって, Abel の連続性定理より, $\leq x \leq 1$ において, $(**)$ は連続である．一方, $\arctan x$ も $\leq x \leq 1$ で連続なので,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

となる．

レポート 4.2. $a \neq b$ と仮定すると, $\varepsilon_0 = |a-b|/2$ とおけば, これは正の数である. よって, 問題の仮定より,

$$|a-b| < \varepsilon_0 = \frac{|a-b|}{2}$$

が成り立つが, これを変形すると $|a-b| < 0$ となり, 絶対値が 0 以上であることに矛盾する. よって, $a = b$ が成立する.

レポート 4.3. $h_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$ とおくと, $n \geq 2$ のとき, $h_n > 0$ である. また, 二項定理より

$$n = (n^{\frac{1}{n}})^n = (1+h_n)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k h_n^k \geq \frac{n(n-1)}{2} h_n^2$$

なので,

$$0 < h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

が成立する. よって, はさみうちの原理より $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ なので,

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(1+h_n) = 1$$

が成立する.

レポート 4.4.

$$(1)\ e^{-3} \qquad (2)\ e$$