

微積分Ⅱ演習 第3回 解答

課題 3.1. (1) 一様収束する. (ヒント: 増減表を書いて, 極大値の値を見ればわかる.)

(2) 一様収束しない.

$\because x \neq 0$ のとき, 極限関数は $f(x) = 0$ であるが, $f_n(0) = 1$ より, $f(0) = 1$ なので, f は不連続. f_n は $\mathbb{R}$ 上で連続なので, $x = 0$ を含む区間において一様収束しない.

(3) 一様収束しない.

$\because x \neq 0$ のとき, 極限関数は $f(x) = 0$ であり, また $f_n(0) = 0$ より, $f(0) = 0$. したがって, $f(x) = 0$. 一方, $f_n(x)$ は $x = 1/n$ で極大値 $1/2$ を取るので,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{2}.$$

したがって, $\{f_n\}$ は $\mathbb{R}$ 上で f に一様収束しない.

課題 3.2. すべての自然数 n と実数 x に対して,

$$\left| \frac{\sin nx}{x^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} =: b_n$$

が成立する. $\sum b_n$ は収束するので, Weierstrass の M 判定法より, $\sum \frac{\sin nx}{n^2}$ は $\mathbb{R}$ 上で一様収束する.

課題 3.3.

(1) 0 (2) $\log 2$

レポート問題 3.1. (1) 各 $x \in [0, 1]$ に対して, $f_n(x) \rightarrow 0$ が分かる. 一方で, $x = 1/n$ とすると, $f_n(1/n) = (1 - 1/n)^n$ なので, $n \rightarrow \infty$ のとき, $(1 - 1/n)^n \rightarrow 1/e$ なので, $\sup_{x \in [0, 1]} f_n(x) \neq 0$ である. したがって, 一様収束しない.

(2) $0 < a \leq 1$ を任意にとると, $x \in [a, 1]$ に対しては, 十分大きな n に対して, $0 \leq f_n(x) \leq an(1 - a)^n$ であり, $n(1 - a)^n \rightarrow 0$ なので, 一様収束することがわかる.

レポート問題 3.2. (1) すべての自然数 n と実数 x に対して,

$$\left| \frac{(-1)^{n-1}n}{n^4 + x^2} \right| \leq \frac{1}{n^3} =: c_n$$

が成立する. $\sum c_n$ は収束するので, Weierstrass の M 判定法より, $\sum \frac{(-1)^{n-1}n}{n^4 + x^2}$ は $\mathbb{R}$ 上で一様収束する.

(2) $f_n(x) = \frac{x}{n(1 + nx^2)}$ は奇関数なので, $x \geq 0$ で増減表を考えると, $x = 1/\sqrt{n}$ のとき, 極大値 $f(x) = 1/(2n\sqrt{n})$ をとる. すべての自然数 n と実数 x に対して,

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2n^{3/2}} =: d_n$$

が成立する. $\sum d_n$ は収束するので, Weierstrass の M 判定法より, $\sum \frac{x}{n(1 + nx^2)}$ は $\mathbb{R}$ 上で一様収束する.

レポート問題 3.3. *Proof.* 部分和を $S_n = \sum_{k=1}^n f_k$ とおく. $\{f_n\}$ は C^1 級関数列なので, $\{S_n\}$ も C^1 級関数列であり, また $\sum f_n$ に I 上各点収束し, さらに $\{S'_n\}$ は I 上 $\sum f'_n$ に一様収束する. よって, 定理 2.3 より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum f_n(x) \right).$$

ここで

$$S'_n(x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^n f_k(x) = \sum_{k=1}^n f'_k(x)$$

なので, $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n(x) = \sum f'_n(x)$ となる. □