微積分II演習II　第2回 解答

課題 2.1. (1) $x = y \neq 0$ とおくと $f(x, y) = \dfrac{2}{3}$. よって, 不連続.

(2) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおく. $|\sin\theta| \leq |\theta|$, $|x| \leq r$, $|y| \leq r$ なので,

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \left|\frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + 2y^2}}\right| \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq r$$

となる. $r \to 0$ のとき, (右辺) $\to 0$ なので, 連続.

. . . .

レポート問題 2.1. 次の関数の極限を調べよ.

(1) 0	(2) 0
(3) 0	(4) 0
(5) 極限なし	(6) 0

(1) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおくと, $|x| \leq r$, $|y| \leq r$ である. よって, $(x, y) \neq (0, 0)$ に対して

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq r \to 0 \quad as \quad r \to +0$$

となる. よって

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

(2) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおくと, $|x| \leq r$, $|y| \leq r$ である. よって, $(x, y) \neq (0, 0)$ に対して

$$\left|\frac{x^3 + x^2 y}{2x^2 + y^2}\right| \leq \frac{x^2(|x| + |y|)}{x^2 + y^2} \leq 2r \to 0 \quad as \quad r \to +0$$

となる. よって

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + x^2 y}{2x^2 + y^2} = 0.$$

(3) $r = \sqrt{x^2+y^2}$ とおくと, $|x| \leq r$, $|\sin y| \leq |y| \leq r$ である．よって, $(x,y) \neq (0,0)$ に対して

$$\left|\frac{x^2 \sin y}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x|^2 |\sin y|}{x^2+y^2} \leq r \to 0 \quad as \quad r \to +0$$

となる．よって

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \sin y}{x^2+y^2} = 0.$$

(4) $r = \sqrt{x^2+y^2}$ とおくと, $|x| \leq r$, $|y| \leq r$ である．よって, $(x,y) \neq (0,0)$ に対して

$$\left|\frac{x^3 - y^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2+y^2} \leq 2r \to 0 \quad as \quad r \to +0$$

となる．よって

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2+y^2} = 0.$$

(5)

$$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

とおく．y 軸上を動きながら原点に近づくときは, $x(t) = 0$, $y(t) = t$ として $t \to 0$ とすればよいから

$$\lim_{t\to 0} f(0,t) = \lim_{t\to 0} \frac{0}{\sqrt{0+t^2}} = 0$$

となる．一方, x 軸を性の方向から原点に近づくときは, $x(t) = t$, $y(t) = t$ として $t \to +0$ とすればよいので

$$\lim_{t\to +0} f(t,0) = \lim_{t\to +0} \frac{t}{\sqrt{t^2+0}} = 1$$

となる．よって, 原点への近づき方を変えると極限値が変わるので, この極限は発散する．

(6) $r = \sqrt{x^2+y^2}$ とおくと, $|x| \leq r$, $|y| \leq r$ である．よって, $(x,y) \neq (0,0)$ に対して

$$\left|\frac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{|x|\sqrt{|y|}}{r} \leq \sqrt{r} \to 0 \quad as \quad r \to +0$$

となる．よって

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

レポート問題 2.2. (1) $y \neq 0$ に対して，

$$|f(x,y)| = \left|x \sin\frac{x}{y}\right| = |x|\left|\sin\frac{x}{y}\right| \leq |x|,$$

また $|f(x,0)| = 0 \leq |x|$ である．よって，$(x,y)\to(0,0)$ のとき，(右辺) $\to$ 0 なので，連続．

(2) $r = \sqrt{x^2+y^2}$ とおく．$1-\cos\theta \leq \dfrac{1}{2}\theta^2$ なので，

$$|f(x,y)-f(0,0)| = \left|\frac{x^2(1-\cos y)+y^2(1-\cos x)}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{r^2}{2}$$

となる．$r\to 0$ のとき，(右辺) $\to 0$ なので，連続．

(3) $y = x - x^2$ $(x \neq 0)$ とおくと，$f(x, x-x^2) = 1-x$．したがって，$\lim_{x\to 0} f(x,x-x^2) = 1 \neq 0$ となる．よって，不連続．