微積分 II 演習　第 1 回 解答

課題 1.1. D が開集合 $\Leftrightarrow D = \mathrm{IntD}$, 　　D が閉集合 $\Leftrightarrow D = \overline{D}$

課題 1.2.

$$(1)\ \{(x,y)\,|\,x^2+y^2<2\} \qquad (2)\ \{(x,y)\,|\,x \neq y\}$$

課題 1.3. 図は省略

(1) $\partial D = \{(x,y)\,|\,|x|=4,\ |y|\le 2$ または $|x|\le 4\ |y|=2\}$, $\mathrm{Int}D = D$, $\overline{D} = \{(x,y)\,|\,|x|\le 4,\ |y|\le 2\}$; 有界開集合

(2) $\partial D = \{(x,y)\,|\,y = x^2,\ 0\le x\le 1$ または $x = y^2\ 0\le y\le 1\}$, $\mathrm{Int}D = \{(x,y)\,|\,y > x^2,\ x > y^2\}$, $\overline{D} = D$; 有界閉集合

(3) $\partial D = \{(x,y)\,|\,y-x=1$ または $y-x=2\}$, $\mathrm{Int}D = \{(x,y)\,|\,1 < y-x < 2\}$, $\overline{D} = \{(x,y)\,|\,1\le y-x\le 2\}$; 非有界で開集合でも閉集合でもない

(4) $\partial D = \{(x,y)\,|\,xy = 1,\ x+y\le 4$ または $xy\ge 1\ x+y=4\}$, $\mathrm{Int}D = D$, $\overline{D} = \{(x,y)\,|\,xy\ge 1,\ x+y\le 4\}$; 非有界な開集合

(5) $\partial D = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2=4,\ x\ge 0$ または $x=0\ |y|\le 2\}$, $\mathrm{Int}D = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2<4,\ x>0\}$, $\overline{D} = \{(x,y)\,|\,,x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0\}$; 有界で開集合でも閉集合でもない

(6) $\partial D = \{(x,y)\,|\,|x|+|y|=4\}$, $\mathrm{Int}D = \{(x,y)\,|\,|x|+|y|<4\}$, $\overline{D} = D$; 有界閉集合

レポート問題 1.1. $a \neq b$ と仮定すると, $\varepsilon_0 = |a-b|/2$ とおけば, これは正の数である. よって, 問題の仮定より,

$$|a-b| < \varepsilon_0 = \frac{|a-b|}{2}$$

が成り立つが, これを変形すると $|a-b| < 0$ となり, 絶対値が 0 以上であることに矛盾する. よって, $a = b$ が成立する.

レポート問題 1.2. $h_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$ とおくと, $n \geq 2$ のとき, $h_n > 0$ である. また, 二項定理より

$$n = (n^{\frac{1}{n}})^n = (1+h_n)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k h_n^k \geq \frac{n(n-1)}{2} h_n^2$$

なので,

$$0 < h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

が成立する. よって, はさみうちの原理より $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ なので,

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (1+h_n) = 1$$

が成立する.

レポート問題 1.3.

(1) e^{-3} (2) e

レポート問題 1.4.

(1) $36x^2(5x^2-2)(3x^5-2x^3+6)^{11}$ (2) $2x+1-x^{-2}-2x^{-3}$

(3) $5 \cdot 3^{5x-7} \log 3$ (4) $-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$

(5) $-\dfrac{a}{a^2+x^2}$ (6) $(\log x)^{\log x} \dfrac{\log(\log x)+1}{x}$

レポート問題 1.5.

(1) $-\dfrac{2}{3\sqrt{x^3+4}}$ (2) $\log(\cosh x)$

(3) $2\log(\sin x + 2) - \log(\sin x + 1)$ (4) $x \arctan x - \dfrac{1}{2}\log(x^2+1)$